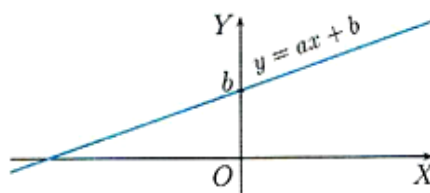


12. Geometria analityczna

Prosta

Równanie $y = ax + b$ nazywamy **równaniem kierunkowym prostej**.



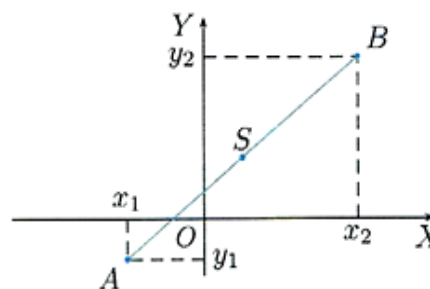
Odcinek

Dane są punkty $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Punkt S , będący **środkiem odcinka AB** , ma współrzędne:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

Długość odcinka AB wyraża się wzorem:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Okrąg o środku w punkcie $S(x_0, y_0)$ i promieniu r jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu S jest równa r . Punkt (x, y) należy do tego okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

- Napisz równanie prostej AB .
 - $A(1, 2)$, $B(-1, 8)$
 - $A(-8, 0)$, $B(4, 9)$
 - $A(-7, 5)$, $B(2, 5)$
- Napisz równanie prostej o współczynniku kierunkowym a , przechodzącej przez punkt P .
 - $a = -\frac{1}{2}$, $P(2, -5)$
 - $a = \sqrt{2}$, $P(0, 1)$
 - $a = 0$, $P(\sqrt{3}, 1)$
- Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(2, -1)$, równoległej do prostej:
 - $4x - y = \sqrt{2}$,
 - $4y - 4 = 0$,
 - $2x - 8 = 0$.
- Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(-2, 3)$, prostopadłej do prostej:
 - $3y + x = 6$,
 - $0,5x - 2y + 1 = 0$,
 - $10x - 5 = 0$.

5. Wyznacz współrzędne środka odcinka AB .
 a) $A(-6, 5), B(2, -3)$, b) $A(-1, 3), B(1, 5)$, c) $A(\frac{4}{5}, \sqrt{2}), B(\frac{6}{5}, 1 - \sqrt{2})$.
6. Punkt S jest środkiem odcinka AB . Oblicz a i b .
 a) $A(-1, 3), B(5, -7), S(a, b)$ b) $A(3a, 2), B(a, 2b), S(b, a)$
7. Wyznacz równania osi symetrii odcinka AB .
 a) $A(-7, 3), B(5, 3)$ b) $A(-2, -3), B(0, 3)$ c) $A(-2, -10), B(4, 8)$
8. Oblicz obwód trójkąta ABC .
 a) $A(2, 2), B(6, -6), C(6, 5)$ b) $A(-7, -3), B(5, 3), C(1, 5)$
9. Czy trójkąt ABC jest równoramienny? Czy jest on prostokątny?
 a) $A(-4, 2), B(0, -1), C(6, 7)$ b) $A(0, -2), B(-1, 5), C(7, -1)$
10. Napisz równanie okręgu o środku S i promieniu r .
 a) $S(3, 5), r = 3$ b) $S(-1, 4), r = \sqrt{5}$ c) $S(2, -7), r = 2\sqrt{3}$
11. Podaj promień i współrzędne środka okręgu o podanym równaniu.
 a) $x^2 + y^2 = 9$ c) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$
 b) $(x - 1)^2 + y^2 = 25$ d) $(x - 5)^2 + (y + 7)^2 = 50$
12. Podaj promień i współrzędne środka okręgu o podanym równaniu.
 a) $x^2 + y^2 - 4 = 0$ b) $x^2 - 2x + y^2 = 0$ c) $x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$
13. Napisz równanie okręgu o środku S , przechodzącego przez punkt A .
 a) $S(0, 0), A(3, 4)$ b) $S(4, 2), A(5, -1)$ c) $S(2, -1), A(8, 2)$
14. Napisz równanie okręgu o środku w punkcie $S(-4, 3)$:
 a) stycznego do osi OX , c) przechodzącego przez punkt $(0, 0)$,
 b) stycznego do osi OY , d) przechodzącego przez punkt $(2, -5)$.
15. Naszkicuj w układzie współrzędnych okrąg O_1 o równaniu $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ i zaznacz punkt $S(-4, 0)$. Korzystając z rysunku, podaj wartość r , dla której okrąg o środku w punkcie S i promieniu r jest styczny zewnętrznie do okręgu O_1 , oraz wartość r , dla której te okręgi są styczne wewnętrznie.
16. Napisz równanie okręgu o środku:
 a) $S(4, -5)$, stycznego zewnętrznie do okręgu $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$,
 b) $S(6, 2)$, stycznego wewnętrznie do okręgu $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 100$.

Zestaw B. Test jednokrotnego wyboru

1. Określ, w której ćwiartce układu leży punkt (x, y) , jeśli jego współrzędne spełniają układ równań:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 4x + 3 \end{cases}$$

A. I

B. II

C. III

D. IV

2. Jeśli punkt $S(-2, 3)$ jest środkiem odcinka o końcach $A(0, a)$ i $B(b, -1)$, to:

A. $a + b = 3$,

B. $a + b = 2$,

C. $a + b = 1$,

D. $a + b = 0$.

3. Pole trójkąta o wierzchołkach $A(0, 0)$, $B(5, -5)$, $C(5, 3)$ jest równe polu kwadratu, którego bok ma długość:

A. 5,

B. 4,

C. $5\sqrt{2}$,

D. $2\sqrt{5}$.

4. Punkty $A(a, 0)$, $B(0, -\frac{1}{4})$, $C(0, -2\frac{1}{2})$ są wierzchołkami trójkąta o polu równym 18, jeśli:

A. $|a| = 32$,

B. $|a| = 18$,

C. $|a| = 16$,

D. $|a| = 12$.

5. Punkt $A(-2, 1)$ jest wierzchołkiem kwadratu, którego przekątne przecinają się w punkcie $S(1, 4)$. Pole tego kwadratu jest równe:

A. 36,

B. 25,

C. 16,

D. 9.

6. Do okręgu danego równaniem $x^2 + y^2 = 35$ należy punkt:

A. $(-5, -3)$,

C. $(2\sqrt{7} - \sqrt{5}, \sqrt{7} + 2\sqrt{5})$,

B. $(-2\sqrt{5}, -4)$,

D. $(2 - 2\sqrt{3}, 4 + \sqrt{3})$.

7. Równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek o końcach $A(-2, -3)$ i $B(-2, 5)$, ma postać:

A. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$,

C. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$,

B. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$,

D. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

8. Okrąg o środku w punkcie $S(3\frac{1}{2}, -4)$ jest styczny do osi rzędnych. Długość tego okręgu wynosi:

A. $3\frac{1}{2}\pi$,

B. 4π ,

C. 7π ,

D. 8π .

9. Okrąg $x^2 + y^2 = 4$ przecina prostą $y = x$ w punktach (x_1, y_1) i (x_2, y_2) . Wartość wyrażenia $|x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2|$ jest równa:

A. 4,

B. $4\sqrt{2}$,

C. 8,

D. $8\sqrt{2}$.

Zestaw C. Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1. (2 pkt) – Informator CKE

Punkty $A(-3, -5)$, $B(4, -1)$, $C(-2, 3)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Oblicz długość ramienia tego trójkąta.

Zadanie 2. (2 pkt)

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty $A(1, 1)$ i $B(3, 5)$. Sprawdź, czy punkt $C(-\frac{1}{2}, -2)$ należy do tej prostej.

Zadanie 3. (2 pkt) – Informator CKE

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych i środek okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$.

Zadanie 4. (2 pkt)

Odcinek o końcach $A(3, -2)$ i $B(7, -10)$ jest przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego. Podaj współrzędne środka okręgu opisanego na tym trójkącie i oblicz promień tego okręgu.

Zadanie 5. (2 pkt)

Punkty $A(-1, 4)$ i $B(2, 1)$ należą do okręgu o środku leżącym na prostej $y = -x + 2$. Wyznacz współrzędne środka tego okręgu.

Zadanie 6. (2 pkt)

Podstawą trójkąta równoramiennego ABC jest odcinek AB , gdzie $A(-2, 1)$, $B(6, 1)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C , wiedząc, że należy on do prostej $y = x + 2$.

Zadanie 7. (2 pkt)

Dla jakiej liczby a proste $ax - y = 3$ i $y = (a - 4)x + \sqrt{2}$ są prostopadłe?

Zadanie 8. (2 pkt)

Punkty $A(-2, -2)$, $B(1, 0)$, $C(3, 8)$ i $D(1, 5)$ są kolejnymi wierzchołkami czworokąta. Oblicz współrzędne punktu przecięcia przekątnych tego czworokąta.

Zadanie 9. (2 pkt)

Odcinek o końcach $A(-3, 4)$ i $B(1, 6)$ jest przekątną kwadratu. Napisz równanie okręgu opisanego na tym kwadracie.

Zadanie 10. (2 pkt)

Wyznacz parametr a , tak aby punkt $P(a, 1)$ należał do okręgu $(x + 1)^2 + y^2 = 5$.

Zadanie 11. (2 pkt)

Punkt $S(-3, 5)$ jest środkiem odcinka AB . Wyznacz współrzędne punktów A i B , jeżeli punkt A leży na osi OX , a punkt B – na osi OY .

Zestaw D. Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 1. (4 pkt)

Punkt $A(a, 3)$ należy do prostej $y = -2x + 5$. Oblicz a . Znajdź na osi OX punkt B , którego odległość od punktu A jest równa $3\sqrt{10}$.

Zadanie 2. (4 pkt) – Matura próbna, listopad 2009

Punkty $A(2, 0)$ i $B(12, 0)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego ABC o przeciwprostokątnej AB . Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y = x$. Oblicz współrzędne punktu C .

Zadanie 3. (4 pkt)

Punkt $S(0, 1)$ jest środkiem odcinka AB . Wyznacz równanie prostej prostopadłej do odcinka AB , przechodzącej przez punkt B , jeżeli $A(-6, -3)$.

Zadanie 4. (4 pkt) – Matura, maj 2009

Punkty $B(0, 10)$ i $O(0, 0)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego OAB , w którym $|\angle OAB| = 90^\circ$. Przyprostokątna OA zawiera się w prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x$. Oblicz współrzędne punktu A i długość przyprostokątnej OA .

Zadanie 5. (6 pkt)

Wyznacz na osi OY taki punkt C , aby trójkąt o wierzchołkach $A(0, 0)$, $B(4, 2)$ i C był trójkątem prostokątnym. Rozpatrz dwa przypadki.

Zadanie 6. (4 pkt)

Punkt $A(-7, 2)$ należy do okręgu stycznego do osi OX w punkcie $B(-3, 0)$. Napisz równanie tego okręgu.

Zadanie 7. (5 pkt)

Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach $A(7, 4)$, $B(1, 10)$ i $C(-2, 1)$ jest równoramienny. Oblicz wysokość trójkąta opuszczoną na podstawę AB oraz jego pole.

Zadanie 8. (5 pkt)

Trójkąt o wierzchołkach $A(6, 0)$, $B(0, y)$ i $C(0, 0)$ jest prostokątny. Oblicz y , jeżeli promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 2.

Zadanie 9. (5 pkt) – Matura, maj 2008

Prosta o równaniu $5x + 4y - 10 = 0$ przecina oś OX układu współrzędnych w punkcie A , a oś OY – w punkcie B . Oblicz współrzędne wszystkich punktów C leżących na osi OX i takich, aby trójkąt ABC miał pole równe 35.

Zadanie 10. (4 pkt)

Punkty $A(2, 1)$, $B(-2, 4)$ i $C(0, 0)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego. Oblicz sinus większego z kątów ostrych tego trójkąta.