

14. Rachunek prawdopodobieństwa

Permutacją n -elementowego zbioru A nazywamy każdy n -wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru.

Wszystkich permutacji zbioru n -elementowego jest $n!$.

Każdy k -wyrazowy ciąg utworzony z różnych elementów zbioru A nazywamy k -elementową **wariacją bez powtórzeń** zbioru A .

Wszystkich k -elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru n -elementowego jest:

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Każdy k -wyrazowy ciąg, w którym wyrazy mogą się powtarzać, utworzony z elementów zbioru A nazywamy k -elementową **wariacją z powtórzeniami** zbioru A . Wszystkich k -elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru n -elementowego jest n^k .

Niech Ω będzie zbiorem wyników pewnego doświadczenia (zbiorem zdarzeń elementarnych). Jeśli wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne (zdarzają się równie często), to prawdopodobieństwo zdarzenia $A \subset \Omega$ wyraża wzór:

$$P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}}$$

Niech Ω będzie zbiorem zdarzeń elementarnych, na którym zostało określone prawdopodobieństwo P , i niech $A, B \subset \Omega$. Wówczas:

1. $P(A) \geq 0$ oraz $P(A) \leq 1$,
2. $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$,
3. jeśli $A \subset B$, to $P(A) \leq P(B)$,
4. $P(A') = 1 - P(A)$.

Dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$ mamy:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Jeśli zdarzenia $A, B \subset \Omega$ wykluczają się ($A \cap B = \emptyset$), to:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

1. Dane są zbiory $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 5, 7\}$ i $C = \{0, 3, 6, 9\}$. Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych, których pierwsza cyfra należy do zbioru A , druga – do zbioru B , a trzecia – do zbioru C ? Ile wśród tych liczb jest liczb parzystych, a ile – podzielnych przez trzy?

2. Ile różnych liczb można otrzymać, zmieniając kolejność cyfr w liczbie:
 - a) 312,
 - b) 5467,
 - c) 231 507?
3. Tworzymy kody, w których na początku występują cyfry, a następnie litery. Ile jest takich kodów, jeżeli wykorzystujemy wszystkie litery i cyfry poniższego kodu oraz cyfry i litery nie mogą się powtarzać?
 - a) 35ABC
 - b) 2468EF
 - c) 2357ADGHE
4. Numery pewnej serii dowodów osobistych składają się z trzech liter i z sześciu następujących po nich cyfr. Oblicz, ile może być dowodów z takimi numerami, jeżeli jedyne występujące litery to A , P i R (mogą się one powtarzać) oraz:
 - a) cyfry się nie powtarzają,
 - b) cyfry mogą się powtarzać.
5. Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry 1, 3, 5, 7 i 8 oraz:
 - a) żadna cyfra się nie powtarza,
 - b) cyfry mogą się powtarzać?
6. Ile jest liczb:
 - a) trzycyfrowych, w których zapisie nie występują cyfry 0 i 3 oraz żadna cyfra się nie powtarza,
 - b) czterocyfrowych, w których zapisie nie występują cyfry 0, 1, 5 oraz żadna cyfra się nie powtarza,
 - c) pięciocyfrowych, w których zapisie żadna cyfra się nie powtarza?
7. Ile jest liczb pięciocyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry:
 - a) 1, 2,
 - b) 0, 1,
 - c) 0, 1, 2,
 - d) 0, 1, 2, 3?
8. Ile jest liczb:
 - a) trzycyfrowych, w których zapisie nie występuje cyfra 0,
 - b) parzystych trzycyfrowych, w których zapisie nie występują cyfry 2 i 5,
 - c) nieparzystych czterocyfrowych?
9. Rzucamy trzy razy żetonem, którego jedna strona jest biała, a druga czarna. Niech zdarzenie A oznacza, że wypadła co najwyżej jeden raz strona biała, B – że wypadła co najwyżej dwa razy strona biała, C – że ani razu nie wypadła strona czarna. Które ze zdarzeń: $A \cap C$, $A \cap B$, $B \cup C$ i $B' \cap A$ jest zdarzeniem niemożliwym, a które – zdarzeniem pewnym?
10. Rzucamy dwa razy kostką. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom: A – suma oczek jest równa 7, B – iloczyn oczek jest równy 6. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń A , B , A' , B' , $A \cap B$ oraz $A \cup B$.

11. Rzucamy trzy razy monetą. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom: A – reszka wypadła nie więcej razy niż orzeł, B – orzeł wypadł co najwyżej dwa razy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń: A , B , $A \setminus B$ i $B \setminus A$.
12. W urnie jest 20 kul ponumerowanych od 1 do 20. Wyjmujemy losowo jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo, że będzie to kula o numerze:
 a) większym od 8, b) podzielnym przez 5, c) będącym liczbą pierwszą.
13. W pewnej klasie jest 16 dziewcząt i 14 chłopców. Uczniom tej klasy zadano pytanie: „Czy byłeś w górach?”. Na diagramie przedstawiono wyniki ankiety. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba z tej klasy:
 a) jest dziewczyną i była w górach,
 b) nie była w górach.
- ☐ tak



75% 25%

dziewczeta

☐ nie



50% 50%

chlopcy
14. Losujemy jedną liczbę spośród liczb naturalnych dwucyfrowych. Oblicz prawdopodobieństwo, że ta liczba jest podzielna przez 11.
15. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$, jeżeli $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,5$ i $B \subset A$.
16. a) Oblicz $P(A \cap B)$ i $P(A \setminus B)$, jeżeli wiadomo, że $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,8$ i $P(A \cup B) = 0,9$.
 b) Oblicz $P(A \cap B)$ i $P(B \setminus A)$, jeżeli wiadomo, że $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,7$ i $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym.
 c) Oblicz $P(A \cup B)$ i $P(A \setminus B)$, jeżeli wiadomo, że $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ i $A \cap B$ jest zdarzeniem niemożliwym.
17. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A , wiedząc, że:
 a) $9P(A) \cdot P(A') = 2$, b) $\frac{P(A)}{P(A')} = 3$.
18. W pierwszej urnie jest 8 kul białych i 2 czarne, a w drugiej urnie są 2 kule białe i n czarnych. Prawdopodobieństwo wylosowania czarnej kuli z pierwszej urny jest o 0,2 mniejsze od prawdopodobieństwa wylosowania białej kuli z drugiej urny. Oblicz n .

Zestaw B. Test jednokrotnego wyboru

1. Ile jest liczb trzycyfrowych mniejszych od 500, w których zapisie występują jedynie cyfry 2, 3 i 7 oraz cyfry mogą się powtarzać?
A. 18 B. 27 C. 32 D. 42
2. Ze zbioru liczb trzycyfrowych podzielnych przez 5 i mniejszych od 200 wybieramy losowo jedną liczbę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to liczba podzielna przez 10?
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{20}{39}$ C. $\frac{19}{39}$ D. $\frac{19}{40}$
3. Dany jest zbiór punktów płaszczyzny o współrzędnych (x, y) , gdzie x i y są liczbami całkowitymi takimi, że $|x| = 2$ i $|y| = 1$. Z tego zbioru losujemy jeden punkt. Prawdopodobieństwo, że jest to punkt, którego współrzędne spełniają warunek $x + y = 3$, jest równe:
A. $\frac{1}{4}$, B. $\frac{1}{3}$, C. $\frac{1}{2}$, D. 1.
4. W pewnej grze rzucamy kostką i monetą. Liczba zdobytych punktów równa się sumie liczby wyrzuconych oczek oraz liczby uzyskanych orłów. Prawdopodobieństwo, że w jednym rzucie uzyskamy 7 punktów, jest równe:
A. $\frac{1}{6}$, B. $\frac{1}{7}$, C. $\frac{1}{10}$, D. $\frac{1}{12}$.
5. Rzucamy trzema kostkami do gry. Prawdopodobieństwo, że iloczyn liczby oczek otrzymanych na tych kostkach jest równy 5, wynosi:
A. $\frac{1}{36}$, B. $\frac{1}{72}$, C. $\frac{1}{108}$, D. $\frac{5}{216}$.
6. Dane są zdarzenia $A, B \subset \Omega$. Ile wynosi prawdopodobieństwo zdarzenia A , jeśli $P(A \cup B) = \frac{7}{15}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{15}$, a $P(B) = \frac{1}{3}$?
A. $\frac{7}{15}$ B. $\frac{4}{15}$ C. $\frac{3}{10}$ D. $\frac{2}{15}$
7. Dane są zdarzenia $A, B \subset \Omega$ takie, że $P(A) = P(B) = \frac{15}{32}$. Jeśli $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$, to suma $P(A \setminus B) + P(B \setminus A)$ jest równa:
A. $\frac{13}{16}$, B. $\frac{11}{16}$, C. $\frac{9}{16}$, D. $\frac{7}{16}$.
8. Dane są zdarzenia $A, B \subset \Omega$ takie, że $P(A) = 2 \cdot P(B)$ i $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$. Jeśli zdarzenie $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym, to $P(A) - P(B)$ równa się:
A. $\frac{1}{4}$, B. $\frac{5}{18}$, C. $\frac{13}{36}$, D. $\frac{1}{3}$.

Zestaw C. Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1. (2 pkt)

Oblicz, na ile sposobów można przypisać pięciu zawodnikom koszulki wybrane spośród koszulek o numerach 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Ile jest sposobów przydzielenia koszulek tym zawodnikom, jeśli nie wykorzystujemy koszulki o numerze 4?

Zadanie 2. (2 pkt)

Spośród sześciu uczniów wybieramy przewodniczącego klasy i jego zastępcę. Zastępcą może zostać każdy z tych uczniów, a przewodniczącym – tylko jedna z czterech osób wybranych spośród tej grupy. Oblicz, na ile sposobów można dokonać wyboru.

Zadanie 3. (2 pkt)

Ile jest liczb czterocyfrowych takich, że pierwsza i ostatnia cyfra są takie same?

Zadanie 4. (2 pkt)

W urnie jest 6 kul białych, 3 kule czarne i pewna liczba kul niebieskich. Oblicz, ile jest kul niebieskich, jeżeli prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej z tej urny wynosi $\frac{1}{3}$.

Zadanie 5. (2 pkt)

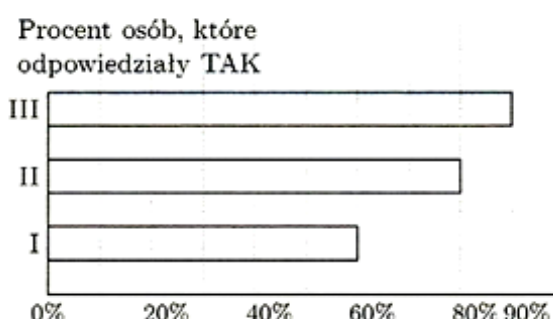
Rozważmy wszystkie liczby dwucyfrowe, w zapisie których użyto wyłącznie cyfr 0, 1, 2, 5 i 6, przy czym cyfry mogą się powtarzać. Spośród tych liczb wylosowano jedną. Oblicz prawdopodobieństwo, że jest to liczba podzielna przez 5.

Zadanie 6. (2 pkt)

W pierwszej urnie są 2 kule białe i 4 kule czarne. W drugiej urnie jest 1 kula biała i 3 kule czarne. Z każdej urny losujemy po jednej kuli. Zdarzenie A polega na wylosowaniu kul o takim samym kolorze. Sprawdź, czy zdarzenia A i A' są jednakowo prawdopodobne.

Zadanie 7. (2 pkt)

Pewna firma w trzech oddziałach: I, II i III, zatrudnia odpowiednio: 75, 45 i 30 pracowników. Wśród wszystkich pracowników przeprowadzono ankietę, w której zadano pytanie: „Czy jesteś zadowolony ze swojej pracy?”. Wyniki przedstawiono na diagramie. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany pracownik jest zadowolony ze swojej pracy.



Zadanie 8. (2 pkt)

Oblicz $P(A \setminus B)$, jeżeli wiadomo, że $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ oraz $P(A \cup B) = \frac{11}{12}$.

Zestaw D. Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 1. (3 pkt)

W pewnym systemie zabezpieczającym komputer generuje czteroelementowe kody dostępu składające się z cyfr i liter. Ile jest takich kodów zawierających dwie różne cyfry i dwie różne litery spośród 24 liter alfabetu, jeżeli cyfry umieszczone są przed literami? Czy jest ich więcej niż 50 000?

Zadanie 2. (4 pkt)

Kod sejfów składa się z 6 różnych cyfr. Na wciśnięcie jednej cyfry potrzeba średnio 1 sekundy. Oblicz, ile minut zajmie w najgorszym razie otwarcie sejfów właścicielowi, który nie pamięta kolejności cyfr, ale:

- a) pamięta wszystkie cyfry, b) pamięta pięć cyfr.

Zadanie 3. (3 pkt)

Spośród liczb czterocyfrowych, w których zapisie wykorzystano tylko cyfry 0 i 1, wylosowano jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo, że dzieli się ona przez trzy.

Zadanie 4. (3 pkt) – Matura próbna, styczeń 2009

Spośród cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6 losujemy kolejno dwa razy po jednej cyfrze ze zwracaniem. Tworzymy liczbę dwucyfrową w ten sposób, że pierwsza z wylosowanych cyfr jest cyfrą dziesiątek, a druga – cyfrą jedności tej liczby. Oblicz prawdopodobieństwo utworzenia liczby większej od 52.

Zadanie 5. (3 pkt)

W urnie jest dziesięć kul ponumerowanych od 1 do 10. Losujemy dwie kule. Czy bardziej prawdopodobne jest, że druga z wylosowanych kul będzie miała dwa razy większy numer od pierwszej kuli w przypadku losowania bez zwracania czy ze zwracaniem?

Zadanie 6. (4 pkt) – Informator CKE

Dane są dwa pojemniki. W pierwszym z nich znajduje się 9 kul: 4 białe, 3 czarne i 2 zielone. W drugim pojemniku jest 6 kul: 2 białe, 3 czarne i 1 zielona. Z każdego pojemnika losujemy po jednej kuli. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul tego samego koloru.

Zadanie 7. (4 pkt) – Matura, maj 2008

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo każdego z następujących zdarzeń:

- A – w każdym rzucie wypadnie nieparzysta liczba oczek.
- B – suma oczek otrzymanych w obu rzutach jest liczbą większą od 9.
- C – suma oczek otrzymanych w obu rzutach jest liczbą nieparzystą i większą od 9.

Zadanie 8. (3 pkt)

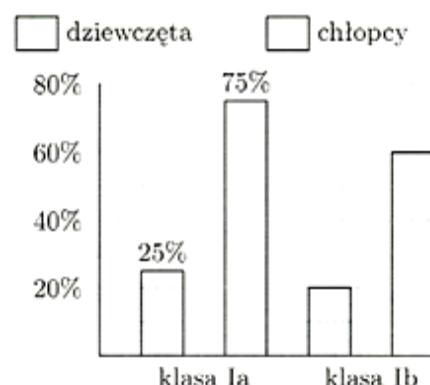
W urnie jest pięć kul białych o numerach 1, 2, 3, 4, 5 oraz trzy kule czarne o numerach: 1, 2, 3. Losujemy bez zwracania dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo, że pierwsza wylosowana kula będzie biała, a druga będzie miała numer 1.

Zadanie 9. (3 pkt)

W trzech urnach: I, II i III jest po n kul. Kule są dwóch kolorów – białe i czarne, przy czym białych kul jest w kolejnych urnach odpowiednio 2, 3 i 4. Z każdej urny losujemy jedną kulę. Oblicz n , jeżeli wiadomo, że prawdopodobieństwo wylosowania trzech kul białych wynosi $\frac{1}{9}$.

Zadanie 10. (5 pkt)

W klasie Ia jest 12 dziewcząt i 8 chłopców, a w Ib jest 5 dziewcząt i 15 chłopców. Uczniom obu klas zadano pytanie: „Czy lubisz oglądać mecze piłki nożnej?”. Na diagramie przedstawiono procent odpowiedzi „tak”. Czy prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba z klasy Ia lubi oglądać mecze piłki nożnej jest większe niż takie prawdopodobieństwo w klasie Ib?

**Zadanie 11. (4 pkt) – Matura, maj 2010**

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że w pierwszym rzucie otrzymamy parzystą liczbę oczek i iloczyn liczb oczek w obu rzutach będzie podzielny przez 12. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Zadanie 12. (4 pkt) – Informator CKE

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką, której jedna ściana ma jedno oczko, dwie ściany mają po dwa oczka i trzy ściany mają po trzy oczka. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: liczby oczek otrzymane w obu rzutach różnią się o 1.

Zadanie 13. (4 pkt)

Rzucamy dwa razy kostką sześcienną, której dwie ściany mają po jednym oczku, trzy ściany mają po dwa oczka i jedna ściana ma cztery oczka. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma wyrzuconych oczek będzie nieparzysta.

Zadanie 14. (4 pkt)

Prawdopodobieństwo wygrania w pewnej loterii co najwyżej 5 zł wynosi 0,9, natomiast prawdopodobieństwo wygrania co najmniej 5 zł jest równe 0,2. Oblicz prawdopodobieństwo wygrania dokładnie 5 zł.

Zadanie 15. (3 pkt)

Oblicz $P(B \setminus A)$, jeżeli $P(A) = \frac{2}{3}$ i $P(A \cup B) = \frac{8}{9}$.